№8-дәріс.

Тақырыбы: Бірінші және екінші текті меншіксіз интегралдар. Меншіксіз интегралдар жинақтылығының Коши критерийі. Меншіксіз интегралдардың абсолютті және шартты жинақтылығы.

Егер интегралдау облысы шектеусіз аралық немесе функция өзінің интегралдау облысында екінші түрдегі үзілісті болса, онда жоғарыда айтылған анықталған интегралдың интегралдық қосындының шегі туралы анықтамасы жарамайды, бұл жағдайда анықталған анықталған интегралды төмендегідей анықтаймыз.

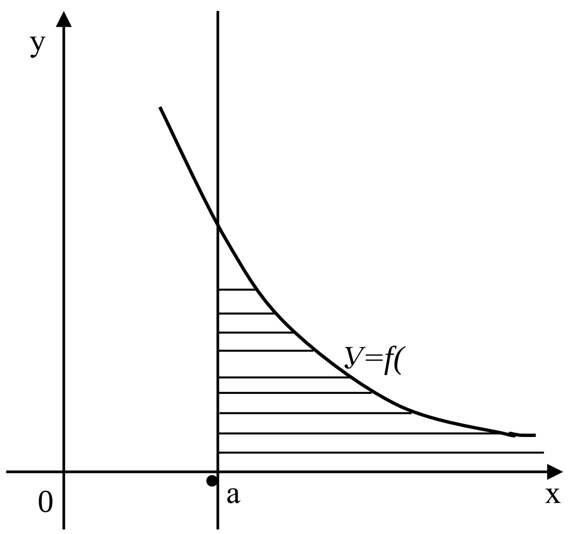
Шектері шексіз болып келген меншіксіз интегралдар.

$y = f(x)$ функциясы $[a, +\infty)$ аралығында үзіліссіз.

Анықтама 1. Осы функцияның a-дан $+\infty$-ке дейінгі меншіксіз интегралы деп мынадай шекті айтамыз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx .$$

Егер бұл шек табылатын болса (тұрақты санға тең болса), онда меншіксіз интеграл ***жинақты*** деп аталады; егер ол табылмаса, онда ол ***жинақсыз*** деп аталады. Егер $[a, +\infty)$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда бұл интеграл шектері: $y = 0$, $x = a$ $(x \geq a)$ түзулері мен және $y = f(x)$ функциясының графигі болатын шектелмеген фигураның ауданын өрнектейді. Жинақты интеграл үшін бұл аудан ақырлы, ал жинақсыз интеграл үшін – шексіз (Сурет 24).



Сурет24

Тәжірибе жүзінде, бұл интегралды Ньютона – Лейбниц теоремасының төмендегі салдары бойынша есептеу ыңғайлы.

Салдар 1. $y = f(x)$ функциясы $[a, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және $y = F(x)$- оның алғашқысы, онда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a) .$$

Мысал 1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln 1=\infty$.

Сонымен, бұл интеграл жинақсыз.

Енді $y=f(x)$ функциясы $(-\infty,b]$ аралығында үзіліссіз болсын. Онда $-\infty$ -*тен* b -ға дейінгі ***меншіксіз интеграл*** деп $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ шегін айтамыз.

Бұндай интеграл (егер $f(x)\ge 0$) шектері:

$$y=0,\quad x=b\quad(x\le b)\quad и\quad y=f(x)$$

болатын фигураның ауданы.

Салдар 2. $y=f(x)$ функциясы $(-\infty,b]$ аралығында үзіліссіз және $y=F(x)$ – оның алғашқысы болса, онда

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x).$$

Егер $y=f(x)$ функциясы барлық сандар осінде үзіліссіз болса, онда $-\infty$ -*тен* $+\infty$ -ке дейінгі ***меншіксіз интеграл*** деп келесі екі интегралдың қосындысын айтамыз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx,$$

(мұндағы c -қандай да бір сан). Бұл анықтама c –ны таңдауға тәуелді емес. Бұндай интеграл ***жинақты*** деп аталады, егер:

$$\int_{-\infty}^{c}f(x)dx\quad және\quad\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$$

интегралдарының екеуі де жинақты болса.

Егер бұл интегралдардың тым болмағанда біреуі жинақсыз болса, онда $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ интегралы ***жинақсыз*** деп аталады. Егер $f(x)\ge 0$ болса, онда $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ интегралы шектері $y=0$ және $y=f(x)$ болатын облыстың ауданын өрнектейді.

Салдар 3. $y=f(x)$ функциясы барлық сандар осінде үзіліссіз және $y=F(x)$ - оның алғашқысы болсын. Онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x).$$

Мысал 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}arctgx-\lim_{x\to-\infty}arctgx=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi .$$

Ендеше, меншіксіз интеграл жинақты.

Мысал 3. Бірінші текті меншіксіз интеграл берілген: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\;(\alpha>0)$. α -ның қандай мәнінде бұл интеграл жинақты, ал қандай мәнінде жинақсыз.

► $\alpha\ne 1$ болсын. Онда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\Bigg|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, \text{если } \alpha>1\\ +\infty, \text{если } \alpha<1\end{cases}$$

Егер $\alpha=1$ болса, онда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty} ln\,\beta=+\infty$, яғни, берілген интеграл жинақсыз.

Нәтижесінде: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, \text{егер } \alpha>1 \quad (\text{жинақты})\\ +\infty, \text{егер } 0<\alpha\le 1 \quad (\text{жинақсыз})\end{cases}$ ◀

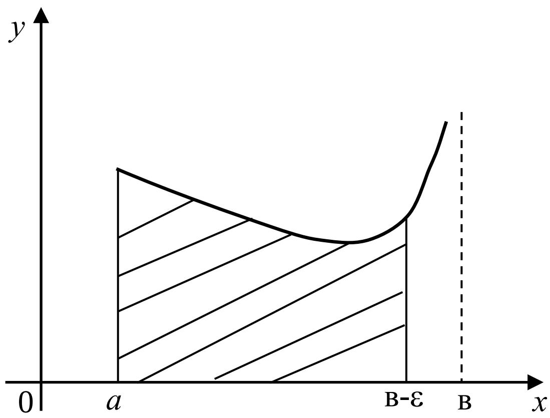
Шектелмеген функциялардың меншіксіз интегралдары.

$y=f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында үзіліссіз және х=b нүктесінде үзілісті.

Анықтама 2. Осы функцияның a -дан b -ның сол жағына дейінгі меншіксіз интеграл деп мынадай сол жақ шекті айтамыз:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx .$$

Егер бұл шек ақырлы санға тең болса, онда интеграл жинақты деп аталады. Егер жоғарыдағы шек табылмаса немесе шексіздікке тең болса, онда интеграл жинақсыз деп аталады (Сурет 25).



Сурет 25

Салдар 4. Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b)$ аралығында үзіліссіз және $y=F(x)$- оның осы аралықтағы алғашқысы болса, онда

$$\int_a^{b-} f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a).$$

Мысал 4.

$$\int_{-1}^{0-}\frac{dx}{x}=ln|x|\Big|_{-1}^{0}=\lim_{x\to 0-0} ln|x|-ln|-1|=-\infty-0$$

Яғни, интеграл жинақсыз.

Егер $y=f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында үзіліссіз және х=a нүктесінде үзілісті болса, онда a -дан b -ның оң жағына дейінгі *меншіксіз интеграл* деп мынадай оң жақ шекті айтамыз:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx .$$

Салдар 5. Егер $y = f(x)$ функциясы $(a,b]$ аралығында үзіліссіз және $y = F(x)$-оның осы аралықтағы алғашқысы болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

Мысал 5. Екінші текті меншіксіз интеграл берілсін $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$. α -ның қандай мәнінде бұл интеграл жинақты, ал қандай мәнінде жинақсыз екендігін анықта.

► $x = 0$ болғанда интеграл астындағы функция шектелмеген. Егер $\alpha \neq 1$ болса, онда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \text{егер} \quad \alpha < 1,\\ \infty, & \text{егер} \quad \alpha > 1.\end{cases}$$

Егер $\alpha = 1$ болса, онда $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln\varepsilon = +\infty$.

Нәтижесінде: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, \text{егер} & 0 < \alpha < 1 \quad (\text{жинакты})\\ +\infty, \text{егер} & \alpha \geq 1 \quad (\text{жинаксыз})\end{cases}$ ◄

Келесі жағдайда, меншіксіз интегралдың жазылуы үзіліссіз функциялардың анықталған интегралымен бірдей болғандықтан, оларды бірден айыру қиын.

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз, (a,b) интервалына тиісті c нүктесінен басқа нүктелерде. Ал осы c нүктесінде үзілісті функция болсын. Онда осы кесіндідегі *меншіксіз интеграл* деп төмендегідей екі меншіксіз интегралдардың қосындысын айтамыз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Бұл интеграл жинақты болады, сонда және тек сонда ғана, егер теңдіктің оң жағындағы екі қосылғыш меншіксіз интегралдар жинақты болса.

Мысал 6.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Жоғарыда көрсетілгендей, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ жинақсыз, ендеше, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ интегралы да жинақсыз. также расходится. Бұл интегралды Ньютона – Лейбниц формуласы бойынша есептеу

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^1$$

ақиқат болмайды, себебі интеграл астындағы $y = \frac{1}{x}$ функция x=0 нүктесінде үзілісті функция.

Меншіксіз интегралдардың жинақтылық белгілері.

Меншіксіз интеграл жинақты ма, жоқ па деген сұраққа жауап беру үшін оны есептеу міндетті емес. Интегралдың жинақтылығын осы берілген интегралды жинақты немесе жинақсыздығы белгілі интегралмен салыстыру арқылы келесі теоремалардың көмегімен анықтауға болады. Бұл теоремалар жинақтылық белгілері деп аталады. Анықтық үшін, бұл белгілерді $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ түріндегі интегралдар үшін қарастыралық. Бұл белгілер барлық тектегі меншіксіз интегралдар үшін ақиқат.

Теорема 1 (Салыстырудың бірінші белгісі).

$y = f(x)$ және $y = g(x)$ функциялары $[a,+\infty)$ аралығында үзіліссіз және осы аралықта $0 \le f(x) \le g(x)$ теңсіздігі орындалсын.

Онда келесі тұжырымдар ақиқат болады:

а) Егер $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ жинақты болса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақты және $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

б) Егер $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болса, онда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралы да жинақсыз.

Мысал 7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+1}$ интегралын жинақтылыққа зерттейік. $[1,+\infty)$ аралығында $\frac{1}{x^5+1} \le \frac{1}{x^5}$ теңсіздігі орындалады және бұл екі функция да үзіліссіз,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \left.\frac{x^{-6}}{-6}\right|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6}{6x^6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (\ne \infty).$$

Онда салыстырудың бірінші белгісі бойынша берілген интеграл жинақты.

Теорема 2 (жинақтылықтың шектік белгісі).

$[a,+\infty)$ аралығында теріс емес функциялар $y = f(x)$, $y = g(x)$ осы аралықта үзіліссіз және 0 мен ∞ -ке тең емес мынадай шек табылсын:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ меншіксіз интегралдары біруақытта жинақты немесе біруақытта жинақсыз.

Мысал 8. $\int_1^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)dx}{x^2+x+1}$ интегралын жинақтылыққа зертте. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$ функциясы $[1,+\infty)$ аралығында үзіліссіз. Бұл функцияның алымы мен бөлімінен кіші дәрежелі мүшелерін алып тастасақ: $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-1,5}$.

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1} : x^{-1,5}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^{-1,5}}{x^2+x+1} = 1$$

болғандықтан, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,5}} = \left.\frac{x^{-0,5}}{-0,5}\right|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-0,5}}{0,5} + 2 = 2$ интегралы жинақты, ендеше жинақтылықтың шектік белгісі бойынша берілген интеграл жинақты.